161. Speiser ノ問題（双曲的ナル爲ノ一十分條件）

小林 善一（東京高師）

茲ニ Speiser ノ問題トハ W—平面上ニ定義サレタ，與ヘラレタ三点上ニノミ特異点ノアル單一連結無限葉ノ Riemann 面 $\mathfrak{F}$ ノ型ノ問題デアル。

氏ハ Über beschränkt automorphe Funktion, Comment. Mathem. Helv. Vol. 4. (1932) ニ於テ Modulfunktion ヲ用ヒテ型ヲ完全ニ分類シテ居ル。

以下同ジク Modulfunktion ヲ用ヒテ，Riemann 面 $\mathfrak{F}$ ガ双曲的デアルタメノ十分條件ヲ述ベテ見タイ。

$\mathfrak{F}$ ハ $W=b_1, b_2, b_3$ 上ニノミ對數分岐点ガ起ルモノトシテ，b_1 ノ上ニ正則点ガアレバ．此ノ葉上デ $b_1\, b_2\, b_3$ ヲ通ル円ヲ引キ，円弧 $b_1 b_2$ 又ハ $b_1 b_3$ ニ沿ツテ $\mathfrak{F}$ ニ切断ヲ入レル．然ルトキハ b_2 又ハ b_3 ハ必ズ $\mathfrak{F}$ ノ境界点デアルカラ，切断サレタ $\mathfrak{F}$ ハ矢張リ單一連結デアル。

此ノ様ニシテ b_1, b_2, b_3 上ノスベテノ正則点ヲ通ル円弧デ $\mathfrak{F}$ ニ切断ヲ入レ，得タル單一連結ノ Riemann 面ヲ F トスル。 F ハ b_1, b_2, b_3 上ニスベテ對數分岐点ヲ持ツ modulare Fläche M ノ一部分トナル。 對應スル Modulfunktion ヲ $m(z)=W$ トシテ之ハ $|z|<1$ デ定義サレテ居ルモノトスル．F ハ此ノ函數ノ逆函數ニヨツテ $|z|<1$ ニ横ハル單一連結範囲 Z ニ描寫サレル、Z ノ周ハ

$|z|=1$ ニ直交スル円弧及ビ $|z|=1$ ニ属スル点ヨリ成ル。

定理. $|z|=1$ ニ属スル Z ノ境界ノ線測度ガ正デアレバ F ハ双曲的デアル。

證明. $|z|=1$ ニ直交スル円弧 $\widehat{ACB}$ ヲ與ヘル、ソノ中心角ヲ θ トスル。$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ト假定スレバ

$$0<K_1<\frac{\widehat{ACB}}{\theta}<K_2$$

ナル如キ常數 K_1, K_2 ガ存在スル。Z ノ周ハ $|z|=1$ ノ可附番個ノ弧ヲ之レニ直交スル円弧デ置キ換ヘタノミデアル故、上記ノ性質カラ長サノ測レル連続曲線デアル。從ッテ Z ヲ $|x|<1$ ニ函數 $x=X(z)$ デ等角ニ描寫スレバ $|x|=1$ ト Z ノ周トハ *total stetige* デアル。即チ Z ノ境界ノ $|z|=1$ ニ属スル点ハ $|x|=1$ ノ測度正ノ点ニ對應スル. 此ノ点集合ヲ Ⓗ トスル。

Ⓗ ニ属スル点ニ終ル半徑ノ上デ $|x|\to 1$ トスレバ、對應スル F ノ曲線ハ殆ンドスベテノ場合 F ノ境界ニ終ルカ、F ノ *Haufungsbereich* ニ向ッテ走ル。

サテ F ガ拋物的デアルトスレバ F ハ函數 $u=U(w)$ デ $|u|<\infty$ ニ等角描寫ガ出來ル、其ノ際 F ハ u 平面ニ可附番個ノ切斷ヲ入レタダケノ單一連結範囲 $\overline{U}$ ニ描寫サレル。函數 $U(w)$, $W(z)$, $X(z)$ ヲタドレバ, $|x|<1$ ハ $\overline{U}$ ニ等角ニ描寫サレテ居ル。此ノ函數ヲ $u=f(x)$ トオケバ, u

ハ $|x|<1$ デ正則單葉デアル。Ⓗ ニ屬スル殆ンドスベテノ半徑ノ上デ

$$\lim_{|x|\to 1} f(x)=\infty$$

ガ成立スル。$m(Ⓗ)>0$ デアルカラ、容易ニ不合理ニ導ケル。—(證明了)—

注意1°. b_i 上ニハ代數分岐点ヲ許シテモヨイ、円 b_1, b_2, b_3 ノ弧ヲ以テ切斷シ

入レルトキ b_i 上ノFノ内点ガスベテ少クトモ一度ヅツ切斷ノ内点又ハ端点トナルコト，而モ生ズル切斷 Riemann 面 F ハ單一連結トナルヤウニスル、之ハ可能デアル。若シFガ幾ツカノ離レタ單一連結ノ範囲ニナツタトシテモ何レカ一ツデ定理ノ假定ガ成立スレバヨイ。

注意2°. 上ノ定理ハ次ノ樣ナ場合ニハ点 b ノ個数ヲ n 個ニ擴張出來ル、即チ円 $|z|<1$ ニ内接シ、且ツ辺ガ $|z|=1$ ニ直交スル円弧 n 辺形ヲ円 $|w-w_0|<r$ ニ描寫シテ n 辺形ノ頂点ニ對應スル点ヲ $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ トスルノデアル。

注意3°. 一般ノ Riemann 面デハ次ノ如キ形デ定理ハ述ベラレル。

F ヲ有限個又ハ無限個ノ曲線ニ沿ツテ切斷スル。カクテ生ズル一ツノ單一連結ノ部分 F_1 ヲ考ヘレバ、之レハ双曲線デアル故、單位円 $|z|<1$ ニ等角ニ描寫スルコトガ出來ル。

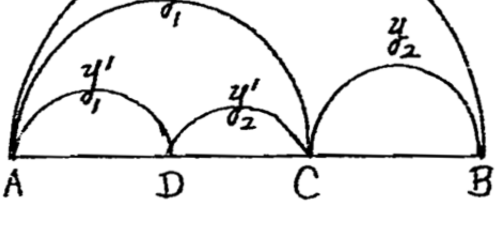
単位円ノ半径ニ對應スル F_1 上ノ曲線ガ F ノ境界点又ハ Häufungsbereich ニ終ルモノヲ考ヘテ、ソノ端点ノ集合ノ測度ガ正デアレバ F ハ双曲的デアル。Speiser ノ Über Riemannsche Flächen. Satz 3, Comment. Mathem. Helv. Vol. 2, (1930) ハ其ノ最モ簡単ナ場合ノ一ツデアル。

注意4°. Speiser ノ如ク式デ定理ヲ述ベヤウトスルニハ $|z|<1$ ノ代リニ $I(z)>0$ ヲ用ヒル方ガ簡単デアル。例ヘバ F ノドレカ一ツノ円板 $b_1, b_2 b_3$ ノ中何レカ一ツ、例ヘバ b_1 ガ正則デアル様ナモノヲトツテ之ヲ $0, \frac{1}{2}, 1$ ニ頂点ヲ持ツ円弧三角形ニ描寫スル。

$m(0)=b_1,\ m(\frac{1}{2})=b_2;\ m(1)=b_3$ トスレバ、F ノ b_1 デノ切断ハ $b_1 b_3$ ニ沿ツテ行フモノトスル。F ノ描寫 Z ハ $\overline{01}$ ヲ直径トスル半円ニ含マレル。Z ノ実軸ニ屬スル境界ノ線測度ガ正ナラバ双曲的デアル。サテ Z ハ $\overline{01}$ ヲ直径トスル半円カラ無数ノ小サイ半円ヲ捨テタモノデアル、之等捨テタ半円ノ直径ヲ x_i トスルトキ

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i < 1$$

ナラバ双曲的トナル。x_i ノ計算ニハ次ノ式ヲ繰返シテ用ヒル。



$$y_1'=\frac{y_1^2+y_1 y_2}{y_1+2y_2},\quad y_2'=\frac{y_1 y_2}{y_1+2y_2},$$

但シ三辺形 ABC ノ $\widehat{AC}$ ニ関ス

ル鏡像ヲ三辺形 ADC トシ、y_i ハ對應スル円ノ直径デアル。